06/03/2017

Μάθημα 1º
Ασκ 4

Θέμα 6º Ασκ 3 Φεβρ. 2017

S μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ κέντρου $(0,0,0)$

(α) Ν.ο.: S είναι συμπαγής ($\Leftrightarrow$ S κλειστό και φραγμένο)

(β) Βρείτε τοπ. και ολ. ακρότατα της $f: S \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = e^{-z^2}$

Λύση (β): $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \}$

$\Rightarrow$ για $(x,y,z) \in S$ έχουμε $f(x,y,z) = e^{-(1-x^2-y^2)} =$

$= e^{-1+x^2+y^2} =: \tilde{f}(x,y)$ όπου $x^2+y^2 \leq 1$.

$\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x,y) = e^{-1+x^2+y^2}$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \}$

δηλ. στο εσωτερικό του.

(1) ακρότατα στο $\mathring{D}$: $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \tilde{f}(0,0) = \frac{1}{e}$

(2) ακρότατα στο ∂D ; (σύνορο)

έχουμε $f(x,y) = 1$

$\Rightarrow$ αφού D συμπαγές, $\tilde{f}$ συνεχής, το $\tilde{f}: D \to \mathbb{R}$ έχει ακρότατα. Τα μόνα που βρήκαμε είναι τα παραπάνω

$\Rightarrow \tilde{f}(0,0) = 1$ ελάχιστο και $\tilde{f}(x,y,0) = 1$ μέγιστο.

Για την $f: S \to \mathbb{R}$ έχουμε $f(0,0,\pm 1) = \frac{1}{e}$ ολικό ελάχιστο

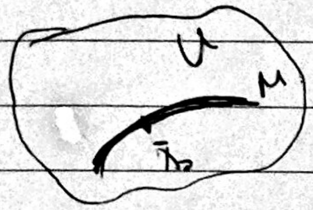
$f(x,y,0) = 1$ ολικό μέγιστο για $x^2+y^2 = 1$.

Θεώρημα (πολλαπλασιαστών Lagrange)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ και $\bar{g}: U \to \mathbb{R}^r$, $r < n$, συνεχώς διαφορίσιμη. Αν η f έχει ακρότατο υπό τη συνθήκη $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$ στο $\bar{x}_0$

(:⟺ η $f|_M$ έχει ακρότατο στο $\bar{x}_0 \in M = \{\bar{x} \in U : \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}\}$)

και η παράγωγος της $\bar{g}$ στο $\bar{x}_0$ να έχει βαθμίδα r.



Τότε $\exists\ \bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ έτσι ώστε:

$$\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{\lambda}\, D\bar{g}(\bar{x}_0) = \underbrace{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}_{\text{πολλαπλασιαστές Lagrange}} \begin{pmatrix} \nabla g_1(\bar{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla g_r(\bar{x}_0) \end{pmatrix}$$

Εφαρμογή Θεωρήματος πολλ. Lagrange

Το θεώρημα δίνει μόνο κάποια σημεία του M, όπου πιθανώς η $f|_M$ έχει ακρότατα. Για να το χρησιμοποιήσουμε κάνουμε τα εξής:

1) Βρίσκουμε τις λύσεις $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in U \times \mathbb{R}^r$ του συστήματος

$$\nabla F(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \nabla(\bar{\lambda} \cdot \bar{g}(\bar{x}) - f(\bar{x})) = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{0} \quad (\Leftrightarrow \bar{x} \in M) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla g_j(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) = \bar{0} \end{cases}$$

2) Τα $\bar{x}$ των λύσεων που βρήκαμε για τα οποία η $D\bar{g}(\bar{x})$ έχει βαθμίδα $= r$ είναι υποψήφια σημεία.

Θέμα 2º Απειρ3 Φεβρ. 2017

Βρείτε τοπικά ολ. ακρότατα της $f(x,y) = x^2 y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Λύση

$\nabla f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2) \stackrel{!}{=} (0,0)$

$\Rightarrow$ κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,y)$, $(x,0)$, $x,y \in \mathbb{R}$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(0,y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Όμως βλέπουμε ότι για $(0,y_0)$ με $y_0>0$ έχουμε $f'(0,y_0)=0$ και $f(x,y) = x^2y^3 \geq 0$ για όλα τα (x,y) με $y>0$

αντίστοιχα το $f(0,y_0)$ είναι $\forall y_0<0$ τοπικό μέγιστο

ια $f(\underset{\neq 0}{x_0},0) = 0$ έχουμε $f(x_0,-\varepsilon)<0$, $f(x_0,\varepsilon)>0$

$\Rightarrow$ δεν έχει ακρότατα.

Τέλος έχουμε $f(\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon^5 > 0$

$f(-\varepsilon,-\varepsilon) = -\varepsilon^5 < 0$

και $f(0,0)=0$

$\Rightarrow$ στο $(0,0)$ δεν έχει ακρότατο.

Θέμα 1º Απειρ3 Φεβρ. 2017

$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2 , y = 0 \}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 , & (x,y) \in M \\ 0 , & \mathbb{R}^2 \setminus M . \end{cases}$$

Ελέγξτε σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ συνέχεια κλπ κλπ

Συνέχεια στο $(x_0, \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{y_0}) \in M$: $f\left(\underbrace{x_0, \frac{1}{\nu}}_{\to (x_0, 0)}\right) = 0 \to 0 \neq f(x_0,0) = 1$

$\bar{M} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 , y = 0 \}$.